

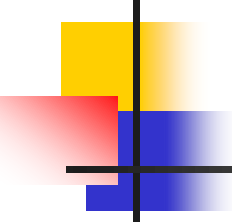
计算机科学导论

张家琳

中国科学院计算技术研究所

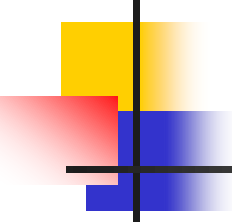
zhangjialin@ict.ac.cn

2024-3-22



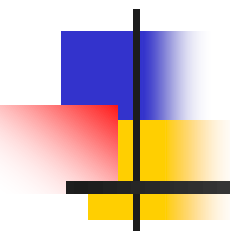
逻辑思维

- 逻辑——①思维的规律、规则：这个想法似乎不合逻辑。②研究思维规律的科学，即逻辑学。③客观事物的规律：历史的逻辑。④观点，主张。多用于贬义：霸权主义的逻辑。（新华字典）
- 广义：泛指规律、道理
- 狭义：逻辑学
 - 逻辑学属于文科专业：哲学的一个分支
- 生活中的逻辑
 - 说一个人逻辑思维强意味着什么？
 - 什么情况你会觉得别人没逻辑/逻辑混乱？

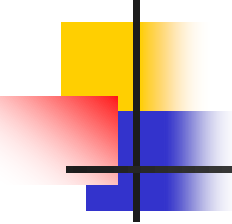


逻辑思维主要内容

- 逻辑学基础
 - 布尔逻辑、真值表
 - 合取范式、析取范式
 - 谓词逻辑
 - 公理系统
- 图灵机模型
- 后续课程
 - 离散数学、数理逻辑、理论计算机基础.....

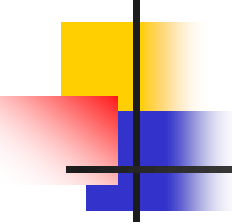


逻辑学基础



引入

- 用“若 p 则 q ”的形式，写出“全等三角形一定相似”的四种命题，并判断它们的真假。
 - 原命题：若是全等三角形，则它们一定是相似三角形
 - 逆命题：若是相似三角形，则它们一定是全等三角形
 - 否命题：若不是全等三角形，则它们一定不是相似三角形
 - 逆否命题：若不是相似三角形，则它们一定不是全等三角形
- 原命题和逆否命题为等价命题
- 否命题和逆命题为等价命题
- 为什么？



布尔逻辑

- 真 T (true), 假 F (false)
 - 今天是星期五。
 - $a^2 \geq 0$ 。
- 非 $\neg$ (negation, not)
 - $\neg x = 1$ (T) *iff* $x = 0$ (F)
 - 有时, 也用 $\bar{x}$ 表示 $\neg x$
- 合取, 与 $\wedge$ (conjunction, and)
 - $x \wedge y = 1$ (T) *iff* $x = y = 1$ (T)

- 析取，或 $\vee$ (disjunction, or)

- $x \vee y = 0$ (F) iff $x = y = 0$ (F)

- 异或 $\oplus$ (exclusive or)

- $x \oplus y = 1$ (T) iff $x \neq y$

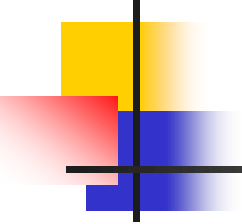
- $x + y \bmod 2$

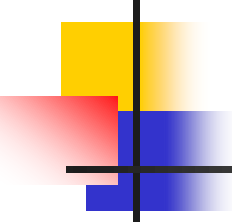
- 生活中的“或”

- 肯德基鸡腿堡套餐：

- 饮料可选可乐或者橙汁或者奶茶



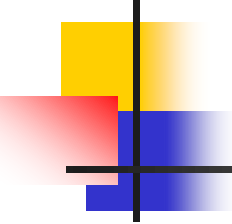
- 
- 蕴含 $\rightarrow$ (material implication)
 - $(x \rightarrow y) = 1 \text{ (T) iff } x = 0 \text{ (F) or } y = 1 \text{ (T)}$
 - 若两个三角形A和B是全等三角形，则它们一定是相似三角形
 - $x = A \text{ 和 } B \text{ 是全等三角形}$
 - $y = A \text{ 和 } B \text{ 是相似三角形}$
 - $x \rightarrow y$

- 
- 山无陵(A), 江水为竭(B), 冬雷震震(C), 夏雨雪(D), 天地合(E), 乃敢与君绝(S)。

- $D \rightarrow S \quad \text{vs} \quad S \rightarrow D?$

- $S \rightarrow (A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E)$

- vs $S \rightarrow (A \vee B \vee C \vee D \vee E) ?$

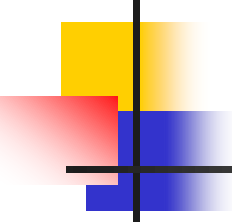
- 
- 山无陵(A), 江水为竭(B), 冬雷震震(C), 夏雨雪(D), 天地合(E), 乃敢与君绝(S)。

- $D \rightarrow S \quad \text{vs} \quad S \rightarrow D?$

- $S \rightarrow (A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E)$

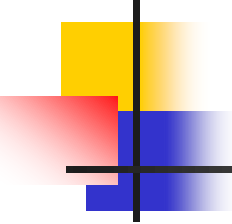
- vs $S \rightarrow (A \vee B \vee C \vee D \vee E)?$

- 自然语言：不明确、有意境、能联想
- 逻辑语言：明确、含义唯一、清晰



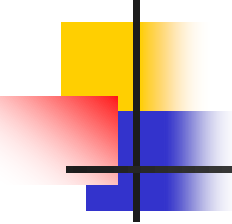
请课后思考

- 原命题: $x \rightarrow y$
- 逆命题: $y \rightarrow x$
- 否命题: ?
- 逆否命题: ?



真值表

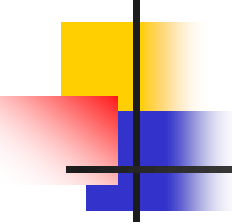
x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0



布尔逻辑

■ 性质:

- $x \vee 0 = x, x \vee 1 = 1, x \wedge 0 = 0, x \wedge 1 = x$
- $x \vee \neg x = 1, x \wedge \neg x = 0$
- $x \wedge y = y \wedge x, x \vee y = y \vee x, x \oplus y = y \oplus x$
(交换律)
- $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
(结合律)
- $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
- $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$
(分配律)
- $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$
- more ??



■ 性质:

- $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$

- $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$

- $x \rightarrow y = \neg x \vee y$

- $x \rightarrow y = \neg y \rightarrow \neg x$

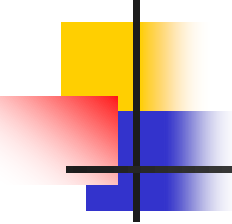
- $x \oplus y = (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$

- $x \oplus y = (x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$

$$x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y)$$

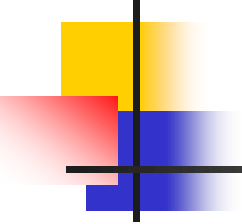
(**De Morgan律**)

(**逆否命题**)



范式

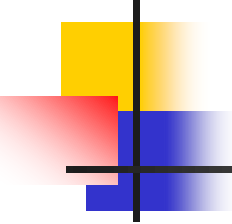
- 合取范式(conjunctive normal form, CNF)
 - $f(x_1, \dots, x_n) = Q_1 \wedge Q_2 \wedge Q_3 \dots \wedge Q_m$
 - 其中: $Q_i = l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_n$, $l_j = x_j$ 或 $\neg x_j$
- 析取范式(disjunctive normal form, DNF)
 - $f(x_1, \dots, x_n) = Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3 \dots \vee Q_m$
 - 其中: $Q_i = l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_n$, $l_j = x_j$ 或 $\neg x_j$

- 
- 例: $x \rightarrow (y \rightarrow z) = ?$

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

- 合取范式: $(\neg x \vee \neg y \vee z)$

- 析取范式: $(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$



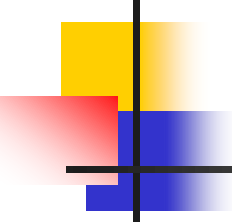
范式

- 析取范式(disjunctive normal form, DNF)
 - $f(x_1, \dots, x_n) = Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3 \dots \vee Q_m$
 - 其中: $Q_i = l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_n$, $l_j = x_j$ 或 $\neg x_j$

定理: 任何一个有 n 个变元的命题 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 一定可以表示成如下的析取范式:

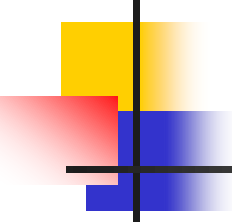
$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = Q_1 \vee Q_2 \vee \dots \vee Q_m,$$

其中每一个 Q_i 都是这 n 个变元或其“非”的合取(“与”)连接式, 即 $Q_i = l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_n$, $l_j = x_j$ 或者 $\bar{x}_j$ 。



布尔函数

- 布尔函数 $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$
- 举例
 - $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\bigvee_{i=1}^{n-1} x_i) \oplus x_n$
- 两个布尔函数相同：有相同的真值表
 - 类似： $f(x, y) = x^2 - y^2$ 和 $g(x, y) = (x + y)(x - y)$ 是相同的多项式

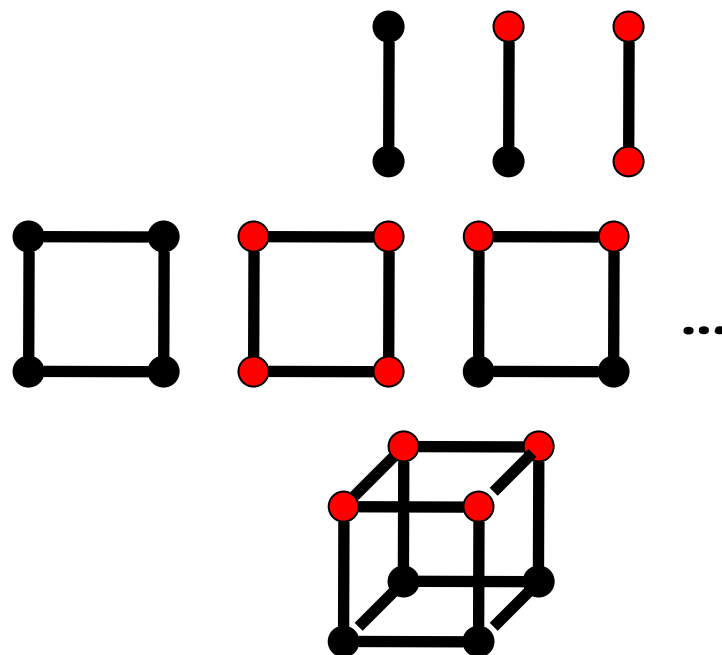


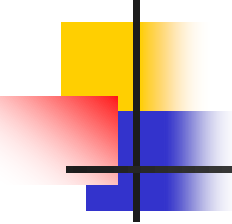
布尔函数

- n 个变量的布尔函数有多少个？
 - $n=0$, 2个 (0和1)
 - $n=1$, 4个 (1, 0, x 和 $\neg x$)
 - $n=2$, ?
 - 2^{2^n}

思考题（单调布尔函数个数）

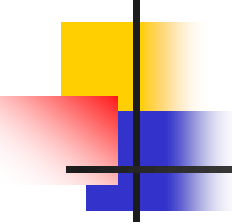
- n 个变量的单调布尔函数有多少个？
 - 对 $(x_1, \dots, x_n)$ 和 $(y_1, \dots, y_n)$ ，如果 $x_i \leq y_i$ 对所有 i 成立，则 $f(x_1, \dots, x_n) \leq f(y_1, \dots, y_n)$
 - $n=0$: 2个
 - $n=1$: 3个
 - $n=2$: 6个
 - $n=3$: ?





布尔函数

- 根据De Morgan律和合取范式（或析取范式），使用 $\neg$ 和 $\wedge$ （或 $\vee$ ）可以表示出所有的布尔函数（允许使用0,1）。
- 问题：能否只用 $\wedge, \vee$ 表示出所有的布尔函数？（允许使用0,1）
 - 不能！ $\wedge, \vee$ 只能表达单调布尔函数
 - 证明：数学归纳



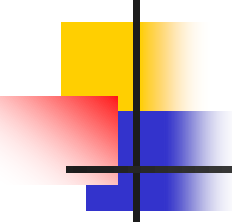
思考题

- 问题：能否只用 $\oplus$? （允许使用0,1）
- 问题：如果只用 $\rightarrow$ 呢? （允许使用0,1）

思考题

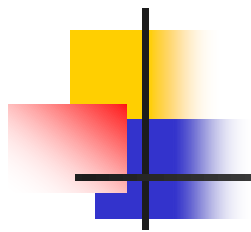
- 问题： n 名同学围成一圈，每个人随机的分配一顶红色或者蓝色的帽子，要求所有人同时猜出自己帽子的颜色。请设计一种策略，使得同时猜对的概率最高。





总结

- 逻辑学基础
 - 布尔逻辑、真值表
 - 合取范式、析取范式
 - 布尔函数
- 思考题
 - 单调布尔函数的计数
 - 只用 $\oplus$ 或只用 $\rightarrow$ 表达所有布尔函数
 - 猜帽子问题



谢谢！