计算机科学导论

张家琳
中国科学院计算技术研究所

zhangjialin@ict.ac.cn

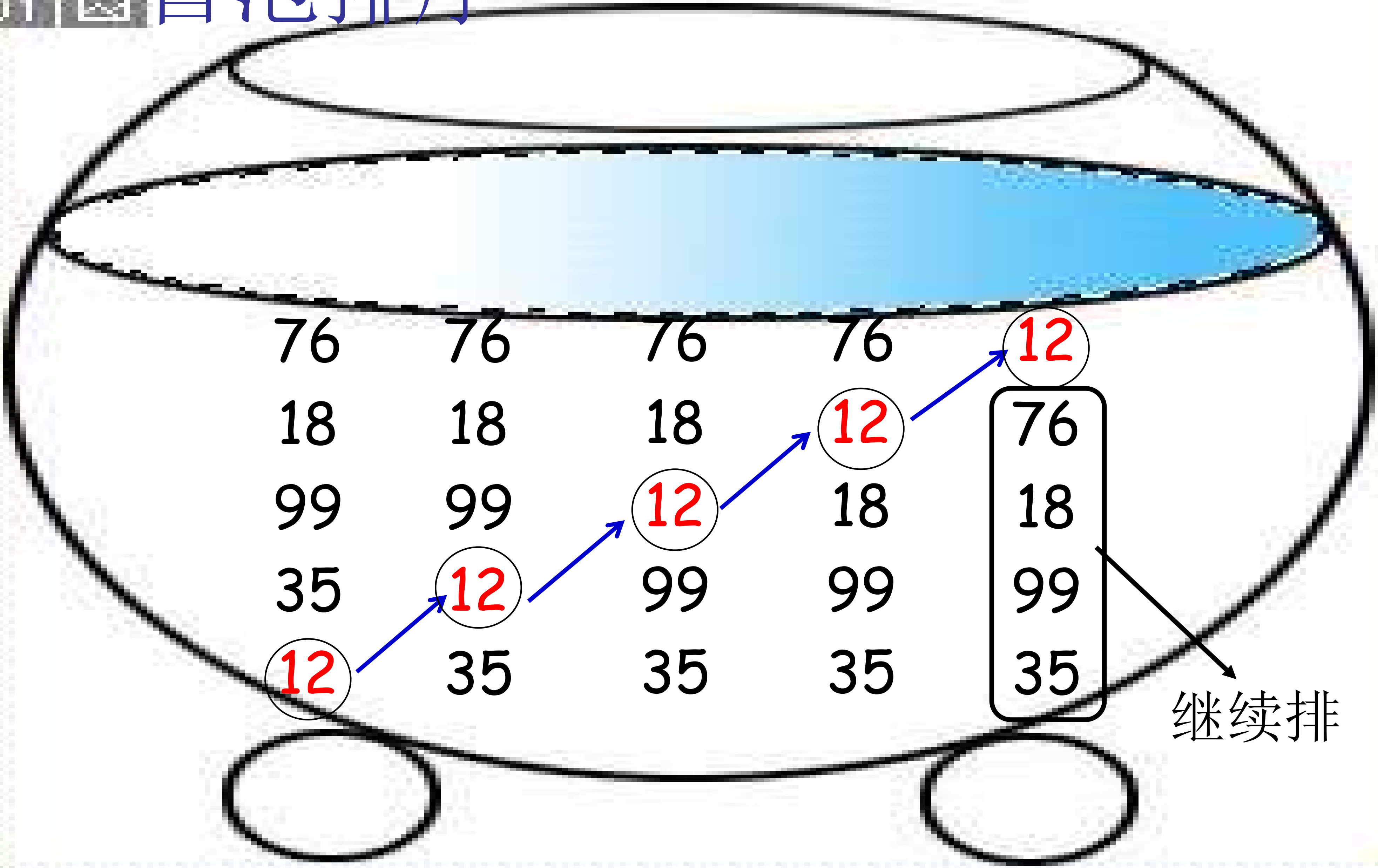
2024-4-12

算法思维

引入：排序

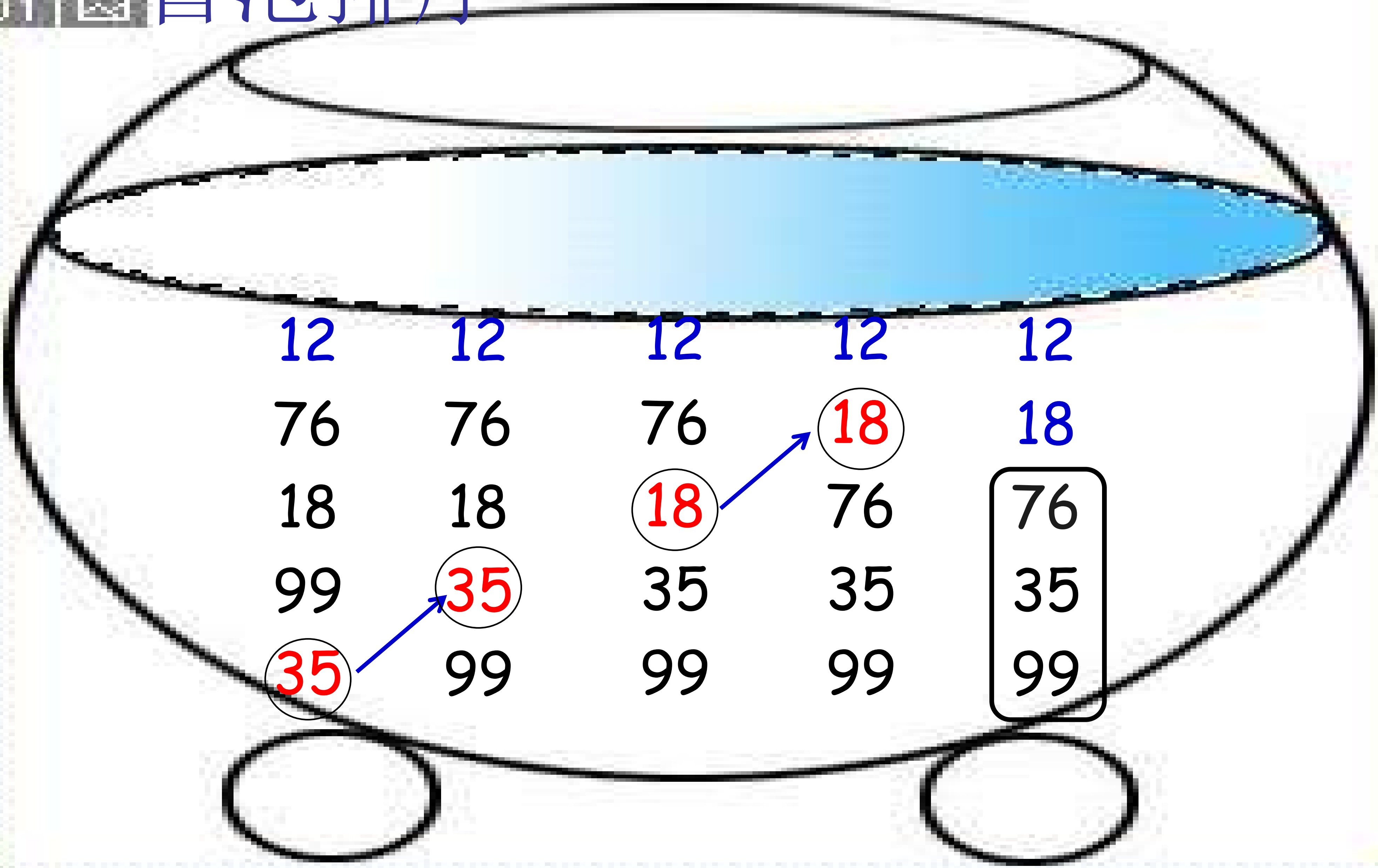
- 任务：给定n个正整数，把他们从小到大排起来
- 请思考在打斗地主、升级、掼蛋……的时候，你是怎么整理牌的？
  - 一张一张摸牌，每次插入已经理好的牌里面（插入排序法）
  - 把最大的牌放到最左边（选择排序法）
  - 先按花色分，再各个花色整理

冒泡排序



76
18
99
35
12
76
18
99
12
35
76
18
12
99
35
76
12
18
99
35
12
76
18
99
35
继续排

冒泡排序


12
76
18
99
35
12
76
18
35
99
12
76
18
35
99
12
18
76
35
99
12
18
76
35
99

算法

- 有穷性。
- 确切性。
- 输入。
- 输出。
- 可行性。

- 例子：把n个数中的最小数放到第一个。

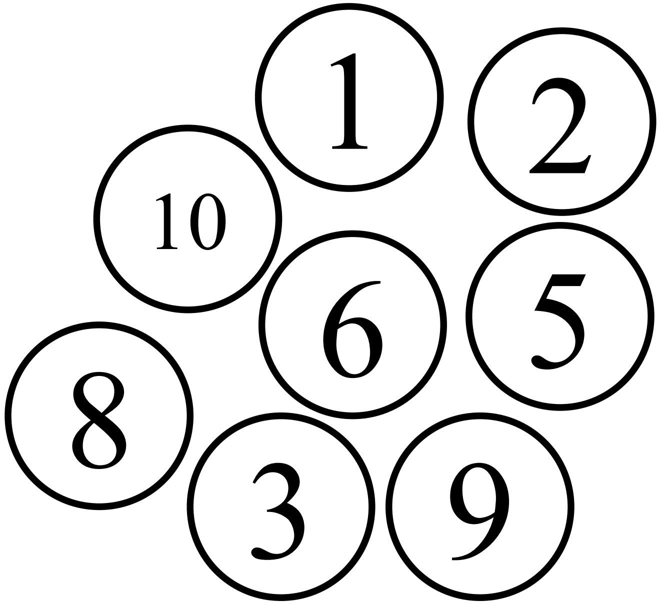
冒泡排序

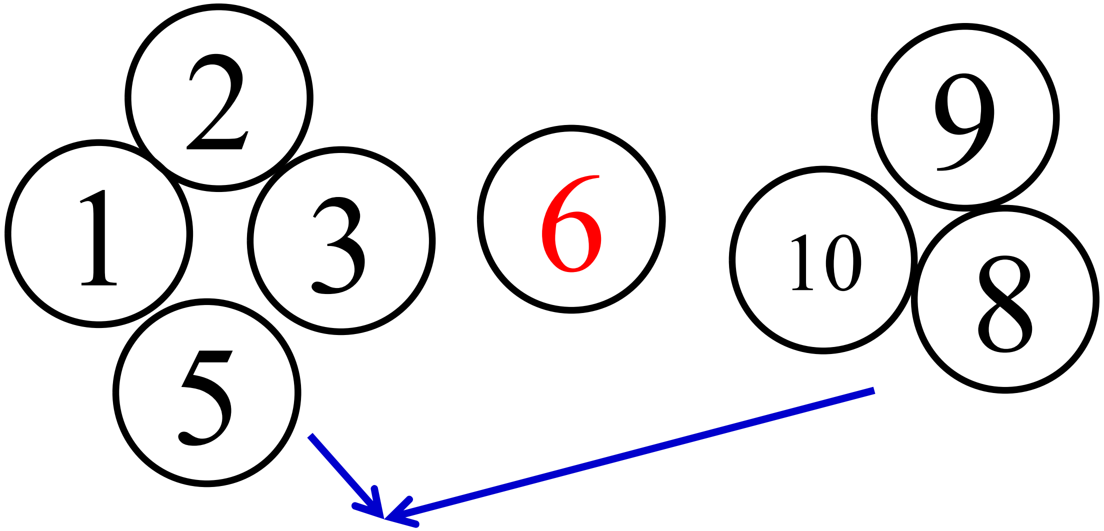
- 需要n-1+n-2+…+1=$n \times (n-1)/2$次比较操作
- 最坏情况下需要$n(n-1)/2$次交换操作
  - n, n-1, …, 2, 1
- 能不能更快？

快速排序

Step1：随机选其中一个数字

Step2：其他数字按照和基准数的大小关系分成两部分

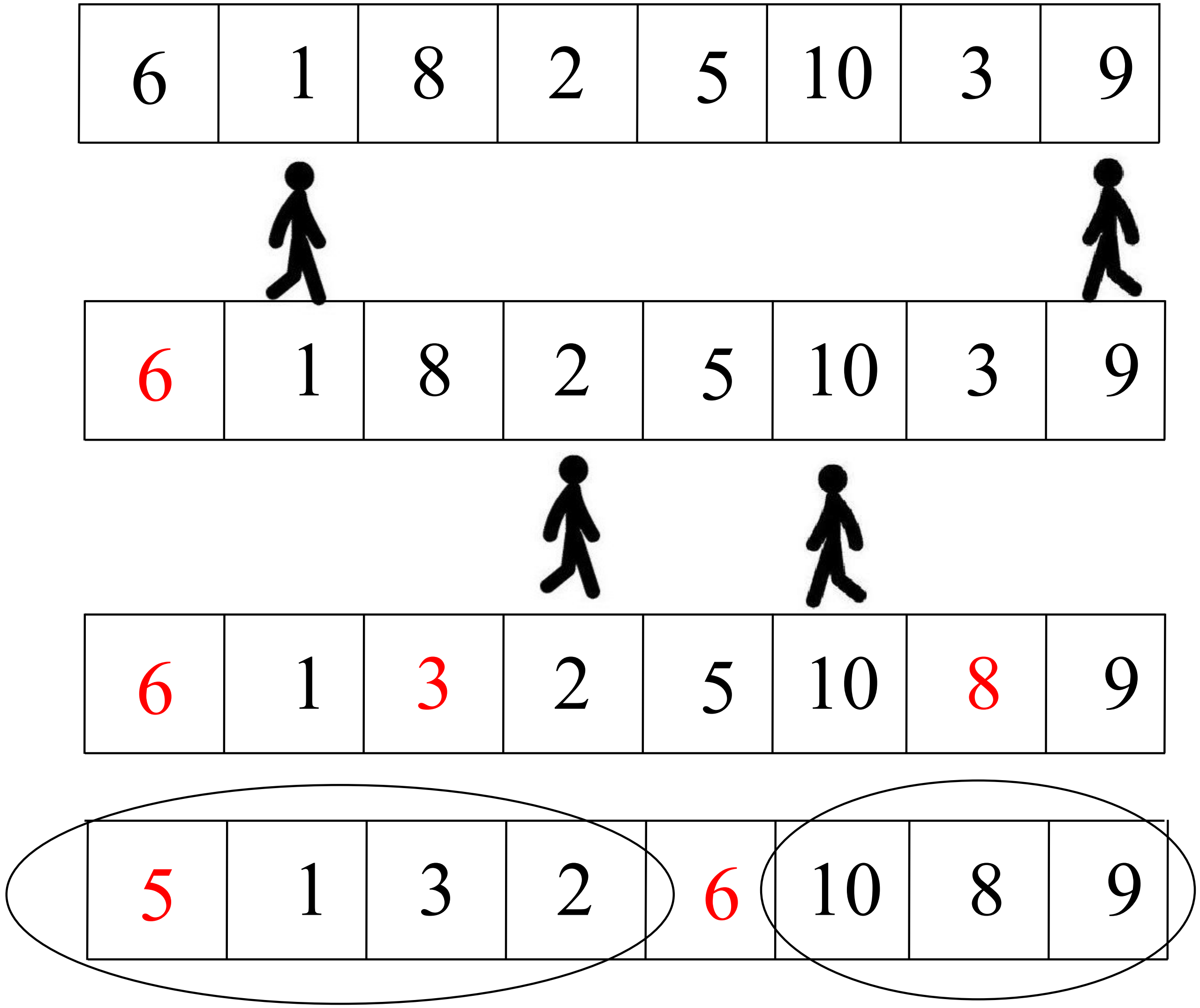


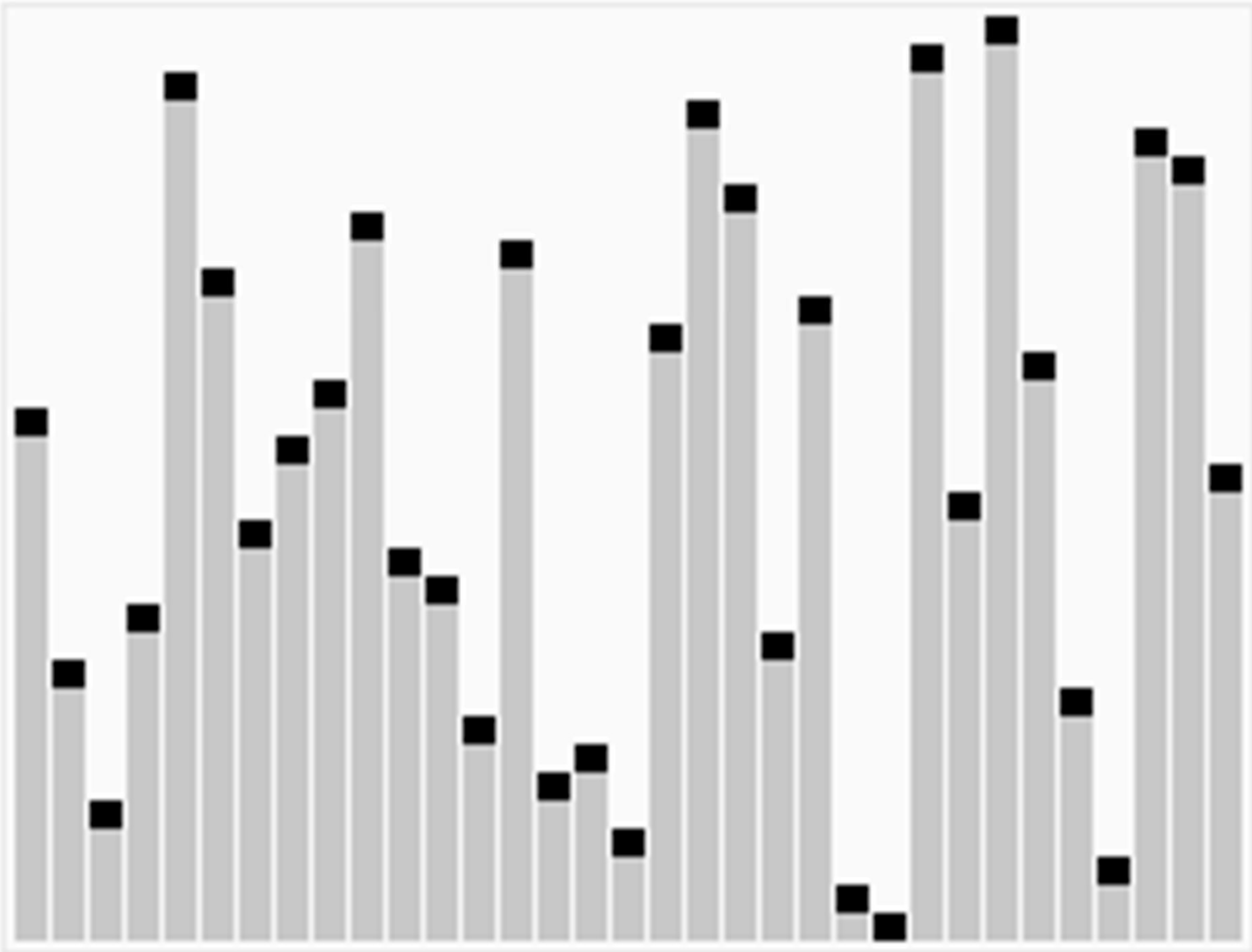


Step3：分别递归

快速排序：一种双指针的实现方式

基准数6





https://en.wikipedia.org/wiki/Quicksort

快速排序

- 需要多少次比较？
  - 最坏情况： $n \times (n-1)/2$
  - 平均情况：？
  - 记T(n)代表n个数快排平均意义下的比较次数
  - $T(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(T(k-1) + T(n-k) + n - 1)$

$$= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} T(k) + n - 1$$

$$\frac{T(n)}{n+1} = \frac{T(n-1)}{n} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)} \qquad \frac{2(n-1)}{n(n+1)} = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n(n+1)}$$

  - $\mathrm{T}(n) \approx 2(n+1)\ln n$

小o，大O记号

- 冒泡排序
  - 运行时间 $O(n^2)$
- 快速排序
  - 平均运行时间 $O(n \log n)$
  - 是$o(n^2)$

小o，大O记号

- $f(n) = o(g(n))$: $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$
  - $n^{1.58} = o(n^2)$
  - $\boldsymbol{n^{1000} = o(2^n)}$
  - $(\log n)^{200} = o(n)$
- $f(n) = O(g(n))$: ∃常数$c > 0, f(n) \le cg(n)$ 对充分大的n成立
  - $n^{1.58} = O(n^2)$ $10n^{1.58} = O(n^{1.58})$
  - $\boldsymbol{10^{1000} n = O(n)}$

$\Omega(\cdot), \Theta(\cdot)$记号

- $f(n) = \Omega(g(n))$: ∃常数$c > 0$, $f(n) \geq cg(n)$ 对充分大的n成立
  - $n^2 = \Omega(n^{1.58})$ $10n^{1.58} = \Omega(n^{1.58})$
- $f(n) = \Theta(g(n))$:
  - $f(n) = O(g(n))$ 并且 $f(n) = \Omega(g(n))$
  - $10n^2 - 20n + 45 = \Theta(n^2)$
- 思考：$2^{\Theta(n)}$ 和 $\Theta(2^n)$ 一样吗？

渐进记号小测试

- 请勾选以下正确的式子
  - $10n^2 - 100n = O(n^2)$
  - $n = O(n^2)$
  - $0.01n^3 = O(n^2)$
  - $n^2 = o(n^2)$

排序问题

- 冒泡排序
- 快速排序
- 还有更多的排序算法
  - 选择排序、插入排序、归并排序、堆排序、二叉搜索树、基数排序……
  - 外部排序

TimSort介绍-设计思想

- 12,10,7,5,7,10,14,25,36,3,5,7,11,15,22
- 分成若干单调的部分
- 12,10,7,5,7,10,14,25,36,3,5,7,11,15,22
- 合并这些部分
  - 怎么合并两个已经排好序的数串？
  - n个数的数串和m个数的数串合并：$n+m-1$ 次运算

TimSort介绍-设计思想

A B C

- 12,10,7,5,7,10,14,25,36,3,5,7,11,15,22
- 合并这些部分
  - 合并顺序会影响效率
  - 先AB合并: (4+5-1)+(9+6-1)=22
  - 先BC合并: (5+6-1)+(4+11-1)=24
  - TimSort：给出了一种巧妙的合并顺序
  - 最坏情况 $O(n + n\log\rho)$
    - ρ是分成的单调的段数

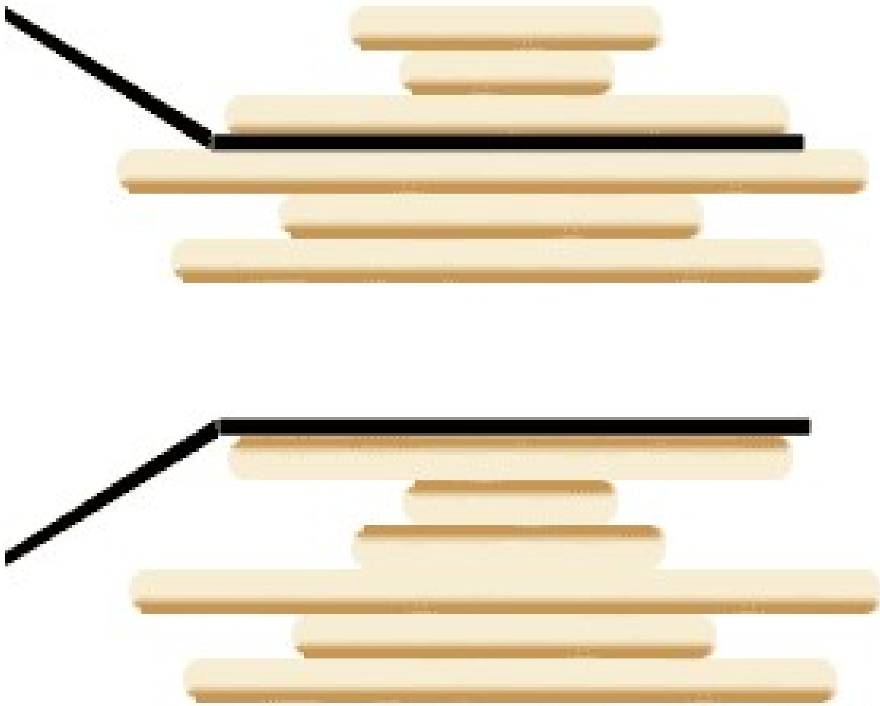
TimSort介绍

- 快速排序 QuickSort
  - 由Tony Hoare 1959年提出
  - 广泛应用在如C、Java的标准库里面
- TimSort
  - 1993年提出，2002年由Tim Peters实现
  - 应用在Python 2.3，Java SE 7，Android平台……
  - 最坏情况 $O(n + n\log\rho)$，2018年证明

思考题

- 翻煎饼问题(Pancake Sorting)

一个厨师做了一叠大小不同的煎饼，他要不断从上面拿起几个煎饼翻到下面。假设有n个煎饼，厨师需要翻动多少次，才能把煎饼按从小到大排好？



翻煎饼问题

- 2, 1, 4, 5, 3
- 5, 4, 1, 2, 3
- 3, 2, 1, 4, 5
- 1, 2, 3, 4, 5

算法思维

- 排序算法
  - 冒泡排序
  - 快速排序
- 小o，大O记号
- 思考题：
  - 翻煎饼问题
  - $2^{\Theta(n)}$ VS $\Theta(2^n)$

谢谢！