计算机科学导论

张家琳

中国科学院计算技术研究所

zhangjialin@ict.ac.cn

2025-3-21

逻辑思维

- 逻辑——①思维的规律、规则：这个想法似乎不合逻辑。②研究思维规律的科学，即逻辑学。③客观事物的规律：历史的逻辑。④观点，主张。多用于贬义：霸权主义的逻辑。（新华字典）
- 广义：泛指规律、道理
- 狭义：逻辑学
  - 逻辑学属于文科专业：哲学的一个分支
- 生活中的逻辑
  - 说一个人逻辑思维强意味着什么？
  - 什么情况你会觉得别人没逻辑/逻辑混乱？

逻辑思维主要内容

- 逻辑学基础
  - 布尔逻辑、真值表
  - 合取范式、析取范式
  - 谓词逻辑
  - 公理系统
- 图灵机模型
- 后续课程
  - 离散数学、数理逻辑、理论计算机基础......

逻辑学基础

引入

- 用“若p则q”的形式，写出“全等三角形一定相似”的四种命题，并判断它们的真假。
  - 原命题：　若是全等三角形，则它们一定是相似三角形
  - 逆命题：　若是相似三角形，则它们一定是全等三角形
  - 否命题：　若不是全等三角形，则它们一定不是相似三角形
  - 逆否命题：若不是相似三角形，则它们一定不是全等三角形
- 原命题和逆否命题为等价命题
- 否命题和逆命题为等价命题
- 为什么？

布尔逻辑

- 真 T (true)，假 F (false)
  - 今天是星期五。
  - $a^2 \geq 0$。
- 非 ¬ (negation, not)
  - $\neg x = 1$ (T) *iff* $x = 0$ (F)
  - 有时，也用$\bar{x}$表示$\neg x$
- 合取，与 ∧ (conjunction, and)
  - $x \wedge y = 1$ (T) *iff* $x = y = 1$ (T)

- 析取，或 ∨ (disjunction, or)
  - $x \vee y = 0$ (F) *iff* $x = y = 0$ (F)
- 异或 ⊕(exclusive or)
  - $x \oplus y = 1$ (T) *iff* $x \neq y$
  - $x + y \bmod 2$
- 生活中的“或”
  - 肯德基鸡腿堡套餐：
    - 饮料可选可乐**或者**橙汁**或者**奶茶

$x \vee y = 1 \Leftrightarrow x$ 和 y 中至少有一个真命题

$x \oplus y \oplus z$: $1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$

$x \to y$:

$x=1$	$y=1$	$x \to y = 1$
$x=1$	$y=0$	$x \to y = 0$
$x=0$	$y=0/1$	$x \to y = 1$

- 蕴含 → (material implication)
  - $(x \to y) = 1$ (T) *iff* $x = 0$ (F) or $y = 1$ (T)
  - 若两个三角形A和B是全等三角形，则它们一定是相似三角形
    - $x =$ “A和B是全等三角形”
    - $y =$ “A和B是相似三角形”
    - $x \to y$

真

假

$x \to y = 0$ iff. $x = 1, y = 0$

- 山无陵(A)，江水为竭(B)，冬雷震震(C)，夏雨雪(D)，天地合(E)，乃敢$\boxed{\text{与君绝}}$(S)。
  - $D \to S$ vs $\boxed{S \to D?}$
  - $S \to \neg(A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E)$

  vs $S \to (A \vee B \vee C \vee D \vee E)$?

- 山无陵(A)，江水为竭(B)，冬雷震震(C)，夏雨雪(D)，天地合(E)，乃敢与君绝(S)。
  - $D \to S$ vs $S \to D$?
  - $\boxed{S \to (A \land B \land C \land D \land E)}$

  vs $S \to (A \lor B \lor C \lor D \lor E)$?
- 自然语言：不明确、有意境、能联想
- 逻辑语言：明确、含义唯一、清晰

请课后思考

- 原命题： $x \rightarrow y$
- 逆命题： $y \rightarrow x$
- 否命题：？
- 逆否命题：？

真值表

$\neg x$	x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \oplus y$
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0

$x \to y$ 和 $y \to x$ 两件事

布尔逻辑

- **性质：**
  - $x \vee 0 = x, x \vee 1 = 1, x \wedge 0 = 0, x \wedge 1 = x$
  - $x \vee \neg x = 1, x \wedge \neg x = 0$
  - $x \wedge y = y \wedge x, x \vee y = y \vee x, x \oplus y = y \oplus x$ (**交换律**)
  - $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
  - $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

    (**结合律**)
  - $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$
  - $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$

    (**分配律**)

- 性质：
  - $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$
  - $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$
  - $x \rightarrow y = \neg x \vee y$
  - $x \rightarrow y = \neg y \rightarrow \neg x$
  - $x \oplus y = (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$
  - $x \oplus y = (x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$

$x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$

$x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y)$

（**De Morgan律**）

$\neg y \rightarrow \neg x = (\neg\neg y) \vee \neg x = y \vee \neg x = \neg x \vee y = x \rightarrow y$.

（**逆否命题**）

x=假 y=真　x=真 y=假

$x \to y = \neg x \vee y$.

$\neg\neg x = x$

x	y	$f(x,y)$	$g(x,y)$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

$2^4 = 16$

范式

- 合取范式(conjunctive normal form, CNF)
  - $f(x_1,\ldots,x_n) = Q_1 \wedge Q_2 \wedge Q_3 \ldots \wedge Q_m$
  - 其中: $Q_i = l_1 \vee l_2 \vee \ldots \vee l_n$, $l_j = x_j$ 或 $\neg x_j$

$f(x,y) = (x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$ $g(x,y) = (x \vee y)$

- 析取范式(disjunctive normal form, DNF)
  - $f(x_1,\ldots,x_n) = Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3 \ldots \vee Q_m$
  - 其中: $Q_i = l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_n$, $l_j = x_j$ 或 $\neg x_j$

$f(x,y,z) = (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$

$\Rightarrow h(x,y,z) = (x \wedge y) \vee (\neg y \wedge \neg z)$

$x \to (\neg y \vee z)$

$= \neg x \vee \neg y \vee z$

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	$\cancel{1}$ 0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

- 例：$x \to (y \to z) = ?$

$(\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z)$

- 合取范式：$(\neg x \vee \neg y \vee z)$
- 析取范式：$(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)$

$f(x,y,z) = 0$

范式

- 析取范式(disjunctive normal form, DNF)
  - $f(x_1,\ldots,x_n) = Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3 \ldots \vee Q_m$
  - 其中: $Q_i = l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_n$， $l_j = x_j$ 或 $\neg x_j$

非全零

定理：任何一个有n个变元的命题$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，一定可以表示成如下的析取范式：

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_m,$$

其中每一个Q_i都是这n个变元或其“非”的合取(“与”)连接式，即$Q_i = l_1 \wedge l_2 \wedge \cdots \wedge l_n$，$l_j = x_j$或者$\bar{x}_j$。

布尔函数

- 布尔函数$f:\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$
- 举例
  - $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\vee_{i=1}^{n-1} x_i) \oplus x_n$
- 两个布尔函数相同：有相同的真值表
  - 类似：$f(x,y) = x^2 - y^2$和$g(x,y) = (x+y)(x-y)$是相同的多项式

布尔函数

x	y	f(x,y)
0	0	0/1
0	1	0/1
1	0	0/1
1	1	0/1

- n个变量的布尔函数有多少个？
  - n=0, 2个（0和1）
  - n=1, 4个（1，0，x和$\neg x$）
  - n=2, **?** $2^4=16$个

n元真值表：2^n行

- $\boxed{2^{2^n}}$

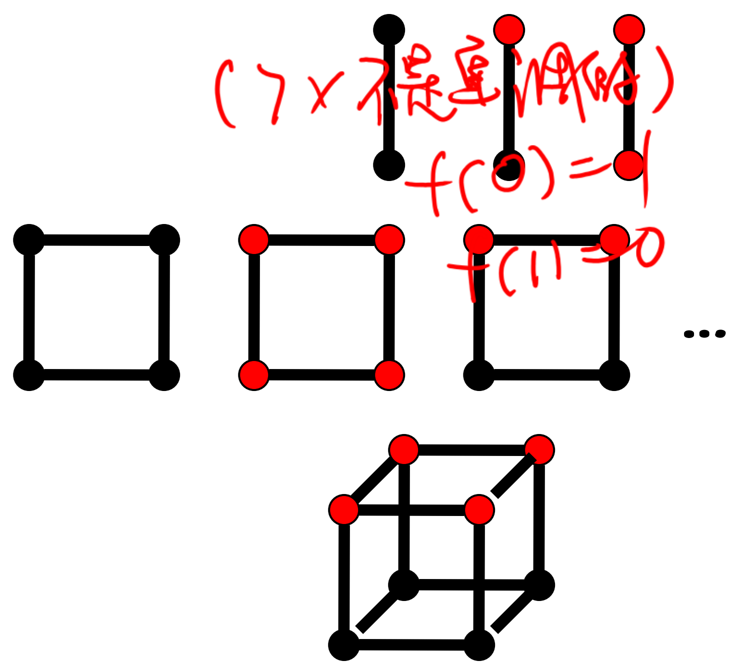
2^{n+1}

$n=3$ 2^8 $n=4$: 2^{16}

"≤"： $0 \le 0$
$0 \le 1$
$1 \le 1$

思考题（单调布尔函数个数）

- n个变量的单调布尔函数有多少个？
  - 对$(x_1, \ldots, x_n)$和$(y_1, \ldots, y_n)$，如果$x_i \le y_i$对所有i成立，则$f(x_1, \ldots, x_n) \le f(y_1, \ldots, y_n)$
  - n=0：2个
  - n=1：3个　　0, 1, x
  - n=2：6个
  - n=3：**?**



布尔函数

- 根据De Morgan律和合取范式（或析取范式），使用¬和∧(或∨)可以表示出所有的布尔函数（允许使用0,1）。
- 问题：能否只用∧, ∨表示出所有的布尔函数？（允许使用0,1）
  - **不能！**∧, ∨只能表达**单调布尔函数**
  - 证明：数学归纳

思考题

- 问题：能否只用$\oplus$？（允许使用0,1）
- 问题：如果只用$\rightarrow$呢？（允许使用0,1）

总结

- 逻辑学基础
  - 布尔逻辑、真值表
  - 合取范式、析取范式
  - 布尔函数
- 思考题
  - 单调布尔函数的计数
  - 只用⊕或只用→表达所有布尔函数

谢谢！