计算机科学导论

张家琳
中国科学院计算技术研究所

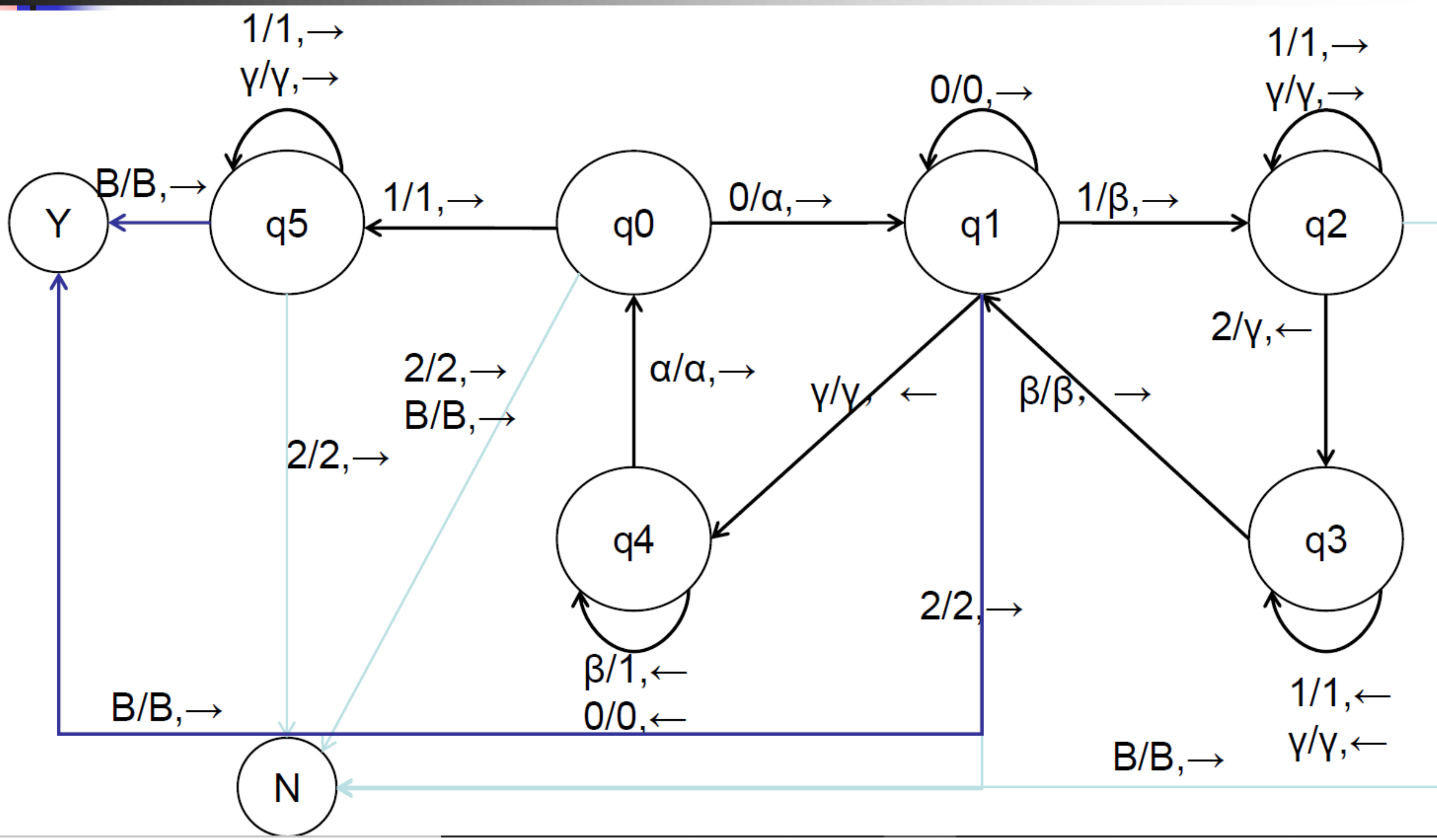
zhangjialin@ict.ac.cn

2025-4-11

思考题

- 判断输入的数组是否形如$0^a 1^b 2^{a\times b}$的形式
- 思路1：每读取1个"0"，从"2"里删去"1"的个数这么多个"2"
- 实现：大循环+小循环的形式

思考题：思路1



1/1,→
γ/γ,→
0/0,→
1/1,→
γ/γ,→
B/B,→
1/1,→
0/α,→
1/β,→
Y
q5
q0
q1
q2
2/γ,←
2/2,→
B/B,→
α/α,→
γ/γ, ←
β/β, →
2/2,→
q4
q3
2/2,→
β/1,←
0/0,←
B/B,→
1/1,←
γ/γ,←
B/B,→
N

000 : → #0# 奇

0000 → #0#0 偶

思考题

- 思路2：利用第1题中的减半操作，对每次剩余的“0”的个数进行奇偶讨论
- 实现：首先对“0”的个数进行减半操作+奇偶校验
  - 若“0”的个数为偶数，则跳过“1”，直接对剩余的“2”进行减半操作，并进行奇偶校验
  - 若“0”的个数为奇数，则先将b个2减去，再对剩余的“2”进行减半操作，再进行奇偶校验

$(2k+1) \times b \stackrel{?}{=} c \rightarrow k \times b \stackrel{?}{=} (c-b)/2$

思考题：思路2

- 4×6=24 → 2×6=12 → 1×6=6 → 0×6=(6-6)
- 3×7=21 → 1×7=(21-7)/2=7

0的个数　1的个数　2的个数

- 3×7=20→1×7=(20-7)/2
  - 错误，未通过奇偶校验
- 3×7=23→1×7=8→0×7=(8-7)/2
  - 错误，未通过奇偶校验

13

23-7=16

逻辑思维主要内容

- 逻辑学基础
  - 布尔逻辑、真值表
  - 合取范式、析取范式
  - 谓词逻辑
  - 公理系统
- 图灵机模型

谓词逻辑

- **全称量词**$\forall$ 和**存在量词**$\exists$
  - 每天都有24个小时。
  - 存在一个素数不是奇数。
  - “都不是”和“不都是”
  - $\forall x\,(\neg P(x))$， $\exists x(\neg P(x))$
  - $\exists x\big(\neg P(x)\big) = \neg(\forall x\,\big(P(x)\big))$

谓词逻辑

- 量词的范围
  - 任何一个自然数，要么它本身为偶数，要么加1后为偶数。
  - $\forall n\ [\mathrm{Even}(n) \vee \mathrm{Even}(n+1)]$，其中断言$\mathrm{Even}(n)$表示$n$是偶数
  - $\forall n \in \mathbb{N}\ [\mathrm{Even}(n) \vee \mathrm{Even}(n+1)]$
- 量词的顺序
  - $\forall\, x, \exists\, y\ (y = x + 1)$ √ y可以依赖x
  - $\exists\, y, \forall\, x\ (y = x + 1)$ ×

- 布尔逻辑和谓词逻辑的更多性质
  - 后续课程会学
- 以上已经学习的
  - 逻辑学的基本知识点
- 什么是逻辑思维？

逻辑思维

Euclid of Alexandria

Elements

- 存在无穷多个素数。
- 如何用数学语言描述？

$\forall p,q \in N\ (p,q>1) \rightarrow (p\cdot q \neq m)$

m是一个素数 ⇒

$$\forall \overset{\in N}{n}, \exists \overset{\in N}{m}, [(m > n) \land (\underbrace{\text{Prime}(m)})]$$

$$\forall n,\exists m,\forall p,q[(m>n)\land(p,q>1\rightarrow pq\neq m)]$$

怎么证明？

- 存在无穷多个素数。

$\forall n, \exists m, [(m > n) \wedge (\text{Prime}(m))]$

- 方法一：
  - 任意给定一个正整数n，我都可以找到一个比n大的素数，……
- 方法二：欧几里得的证明方法
  - 假如只有有限个素数，……，得出矛盾

$\neg(\exists n, \forall m, [(m > n) \rightarrow \neg(\text{Prime}(m))])$

逻辑思维

- 存在无穷多个素数。
- 假如只有有限个素数，……，得出矛盾

$$\forall n, \exists m, [(m > n) \wedge (\mathrm{Prime}(m))]$$

$$\neg(\exists n, \forall m, [(m > n) \rightarrow \neg(\mathrm{Prime}(m))])$$

- 能自己想明白
- 能和别人说明白

- 对$n > 2$，丢潘图方程 $x^n + y^n = z^n$ 不存在非平凡解。

$$\forall a, b, c, n[(abc \neq 0) \wedge (n > 2) \rightarrow a^n + b^n \neq c^n]$$

课后思考

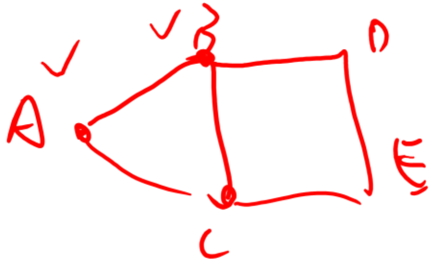
(p, p+2)

- 存在无穷多对孪生素数。

- 对任何一个正整数n，如果是奇数则乘3加1，如果是偶数则除2，重复此过程，最终将得到1。

$3n$ + 1猜想

- $6 \to 3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$
- $15 \to 46 \to 23 \to 70 \to 35 \to 106 \to 53 \to 170 \to 85 \to 256 \to 128 \to 64 \to 32 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$
- Solve it!!



V: 点集 {A, B, C, D, E}

E: 边集 {AB, AC, BC, BD, DE, CE}

B, E 不相邻.

- 四色定理：任何平面图都可以被四着色，使得任何两个相邻的顶点不同色。

$$\forall \text{平面图} G=(V,E), \exists c: V \rightarrow \{1,2,3,4\} \quad \forall (u,v) \in E, [c(u) \neq c(v)]$$

- 可满足性问题(SAT)：给定布尔公式φ，是否存在一种赋值，使得这个公式为真

$$(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_4 \vee \neg x_6) \wedge (x_2 \vee x_4 \vee \neg x_8) \wedge \ldots$$

$$\exists A: \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \rightarrow \{0,1\}, [\phi(A(x_1), \ldots, A(x_n)) = 1]$$

$x \wedge \neg x \wedge$

练习：皮埃诺公理之一

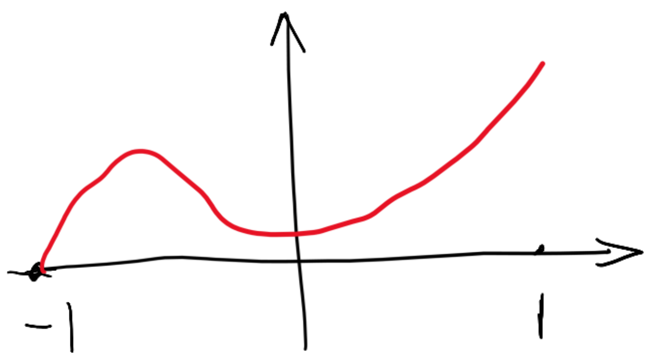
- 每个自然数有后继数，这个后继数也是自然数
  - succ(n)表示n的后继数，如果n没有后继数，那么定义succ(n)=∅
  - ℕ表示自然数的集合

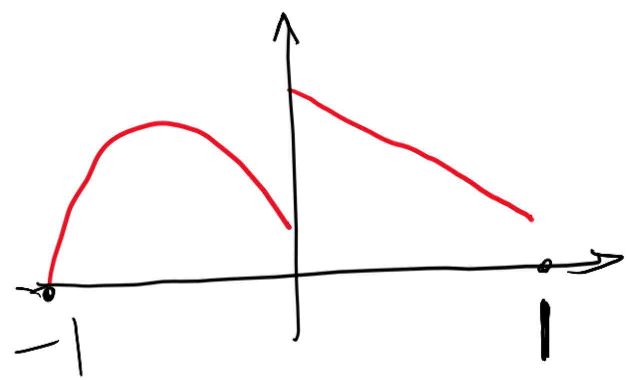
$\forall n((succ(n)\neq\phi)\rightarrow(succ(n)\in N))$ $\Leftarrow$

$\forall n((succ(n)\neq\phi)\wedge(succ(n)\in N))$ ✓

课后思考

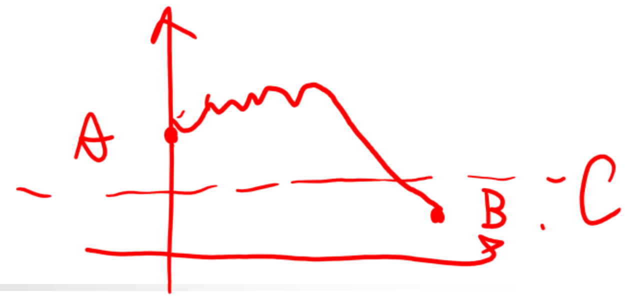
- 连续函数的定义
  - 仅考虑一元实函数： $f:[-1,1]\rightarrow R$



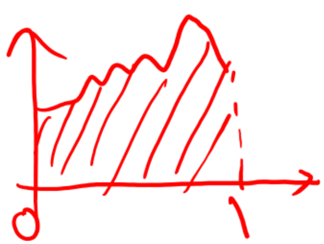


- 答案请见微积分课本

课后思考



- 连续函数的介值性
  - f是[0,1]上的连续函数，若f(0)=A，f(1)=B，且A≠B。则对A、B之间的任意实数C，在开区间(0,1)上至少有一点c，使f(c)=C
  - 直观理解
  - 如何严格证明？
- 积分的直观概念 VS 积分的定义



逻辑思维

- 能自己想明白
- 能和别人说明白

公理系统

$A \to x$ 真

$x \land \neg x$ 假

- 公理系统：
  - 由若干个命题组成
  - 完备性，一致性（相容性），独立性
  - 完备性：任何命题都可由此公理系统经有限步推定真伪；
  - 一致性：不能从公理系统导出矛盾
  - 独立性：所有公理都是互相独立的，使公理系统尽可能的简洁

$f = (A \to A) \wedge (B \to B)$.

A	B	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

布尔逻辑

- 真和可以被证明是一回事

- 布尔逻辑的公理系统（某一种表示）

$$A \to (B \to A)$$

$$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$

$$((\neg A) \to (\neg B)) \to (B \to A)$$

$A \to A$

$\angle DOE = 120^\circ$.

罗巴切夫斯基

欧几里德几何

- 公设1：任意一点到另外任意一点可以画直线
- 公设2：一条有限线段可以继续延长
- 公设3：以任意点为心及任意的距离可以画圆
- 公设4：凡直角都彼此相等
- 通过一个不在直线上的点，有且仅有一条不与该直线相交的直线。（平行公设）

- 非欧几何
- 欧式几何的公理体系：希尔伯特公理系统，具有完备性和一致性
  - 真和可以被证明是一回事

其他公理系统呢？

- 给定一个公理系统，是否总是可以通过这个公理系统来证明每一个命题是否为真？
- NO，Godel不完备性定理

Godel不完备性定理

- 定理一：任意一个包含初等数论的数学系统，都不可能同时拥有完备性和一致性。即存在一个真命题，它在这个系统中不能被证明。
- 定理二：任意一个包含初等数论的系统S，当S无矛盾时，它的无矛盾性不可能在S内证明。

真和可以被证明是两件事情！！

Kurt Godel
1906-1978

Godel不完备性定理

- 证明思想
  - 对角线法

    上
  - 类似停机问题不可判定的证明（下节课会学到）

逻辑思维

- 能自己想明白
- 能和别人说明白

- 公理化
  - **真**和**能被证明**是两件事情
  - 可证的一定是真的（假设有一致性），但真的不一定可证

机器证明

NO！

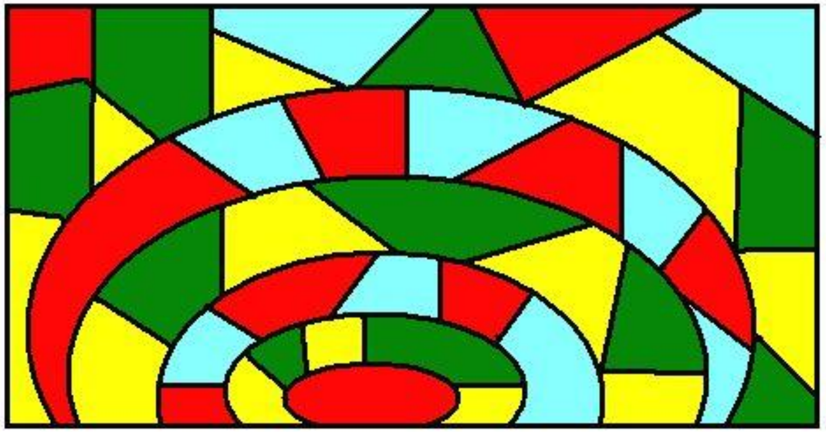
Godel不完备性定理

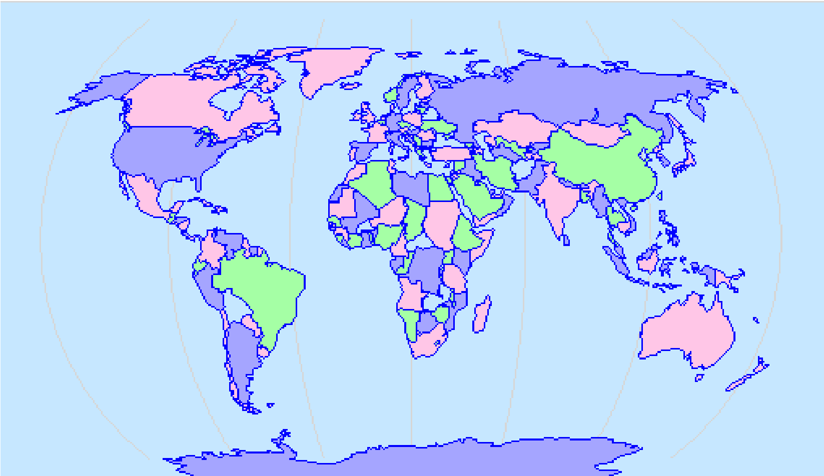
- 笛卡尔
  - 一切问题都可以化为数学问题，一切数学问题都可以化为代数问题，一切代数问题都可以化为代数方程的求解问题。
- 希尔伯特（公理系统的机械化判定问题）
  - 给定一个公理系统，是否存在一种机械的方法（即现在所谓的算法），可以验证每一个命题是否为真？

特定问题的机器证明

- 四色定理
- 开普勒猜想
- 几何定理机器证明
  - 吴文俊，吴方法

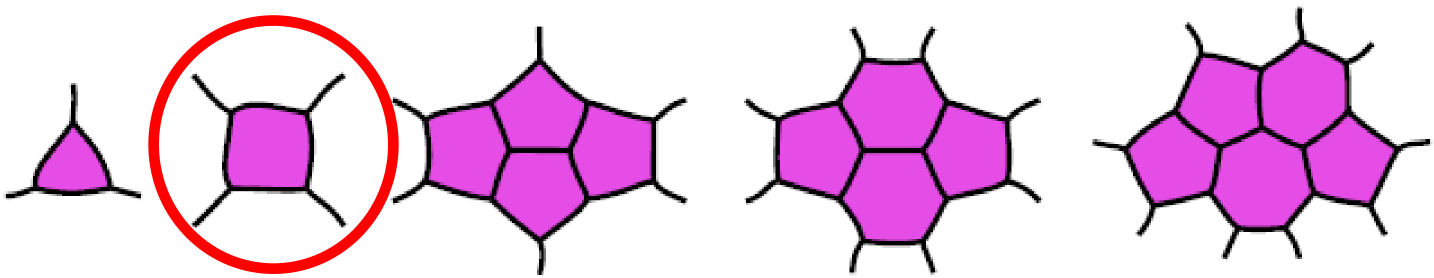
- 四色定理
  - Appel and Haken，1976



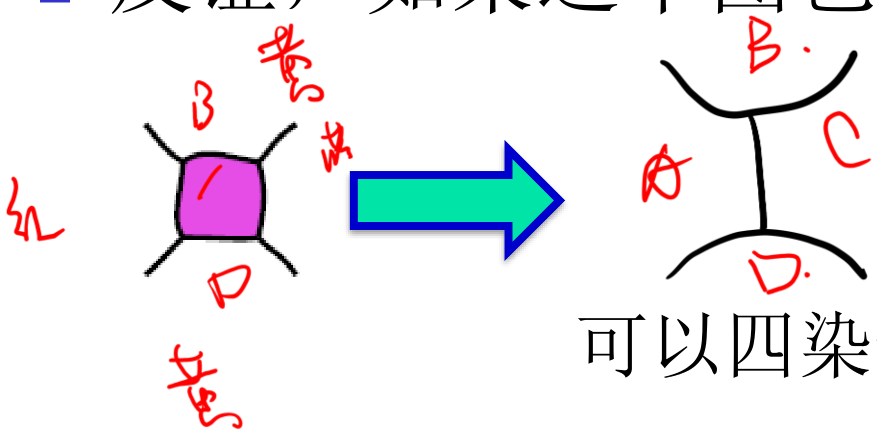


证明思路

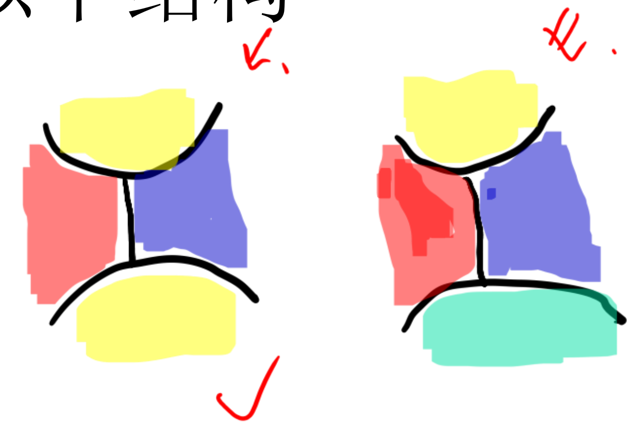
- 反证：考虑一个极小的不能四染色的图，首先证明这个图一定不包含以下结构

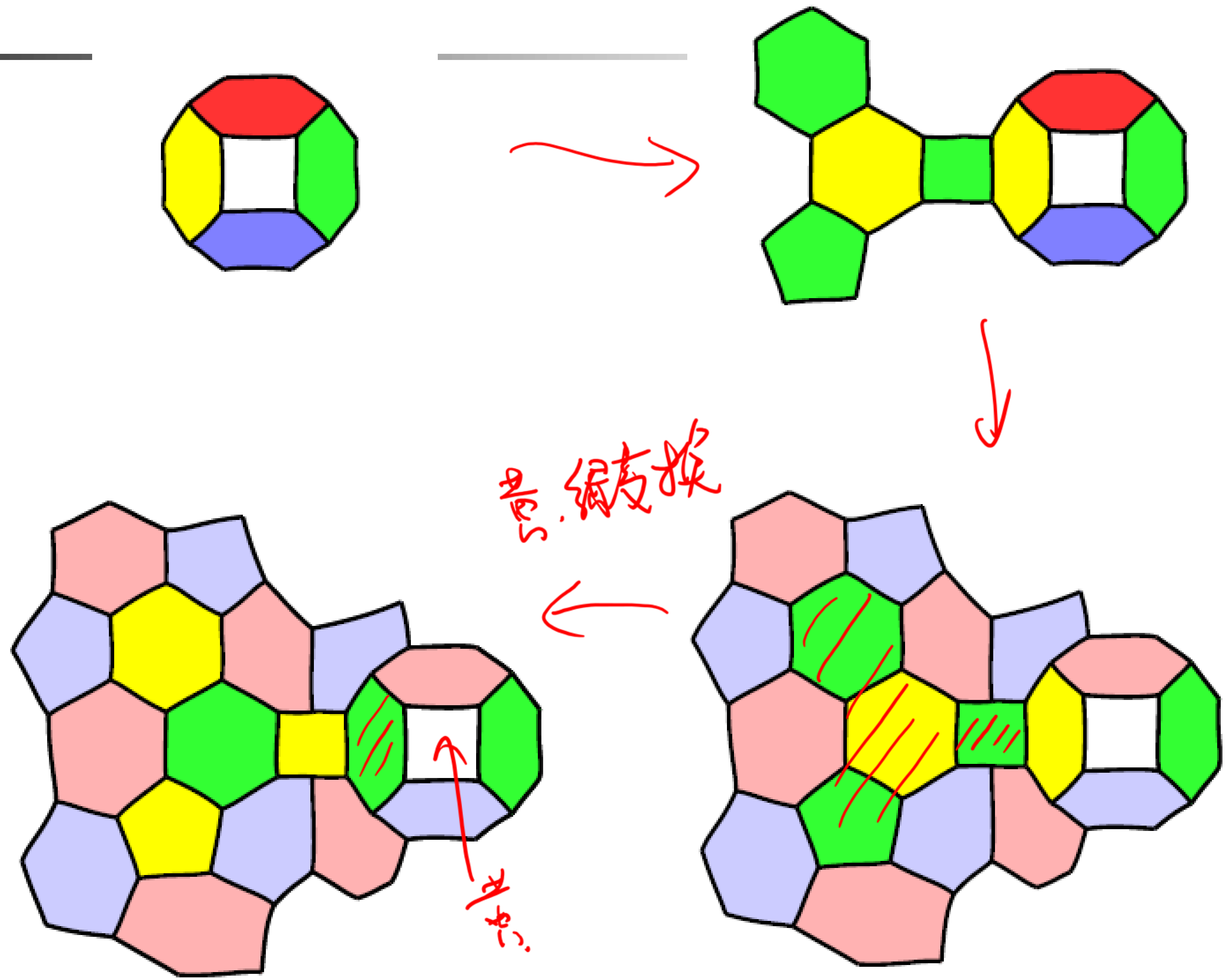


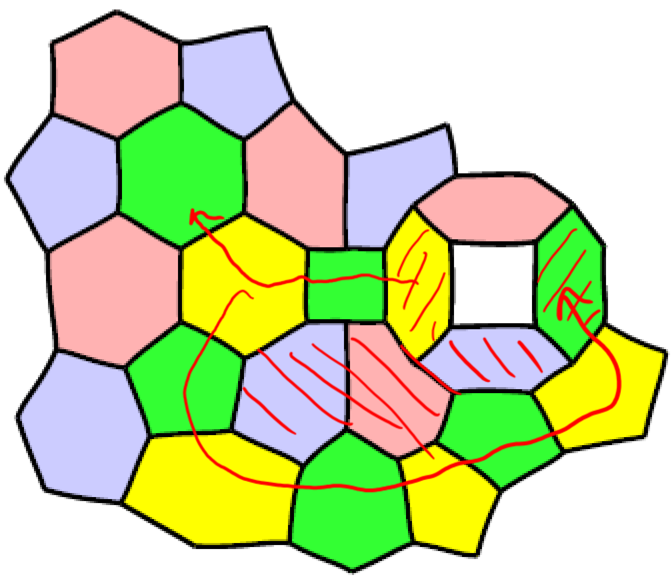
- 反证，如果这个图包含以下结构

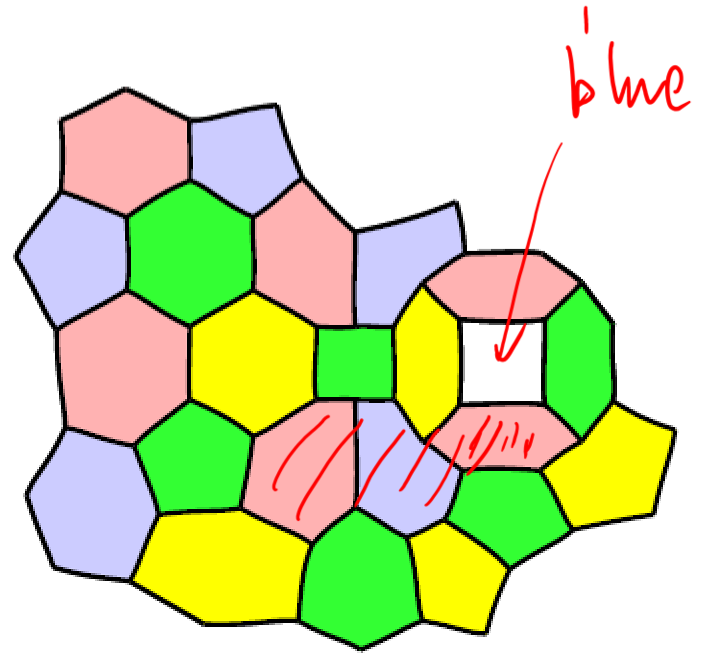


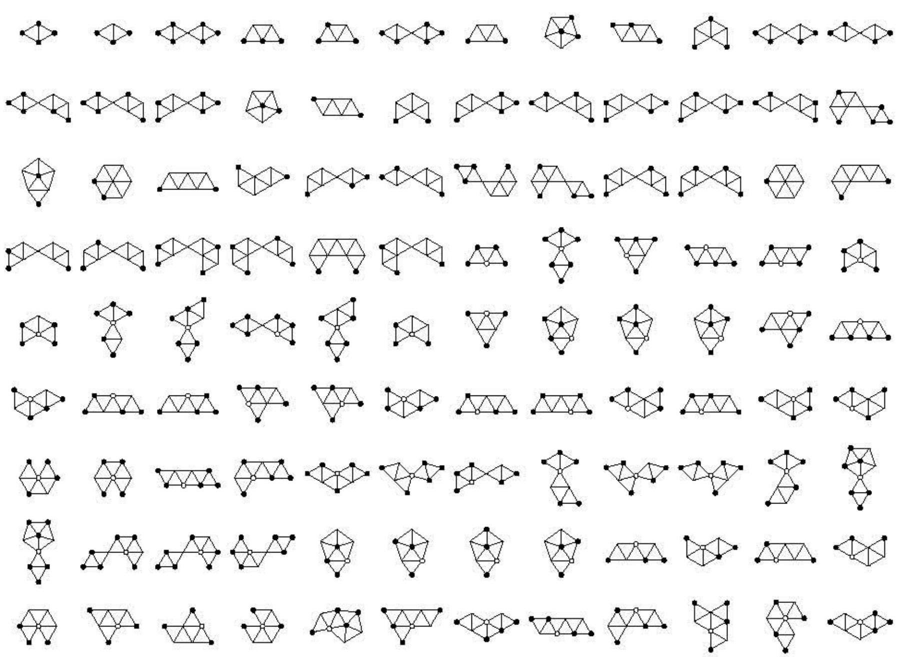
可以四染色

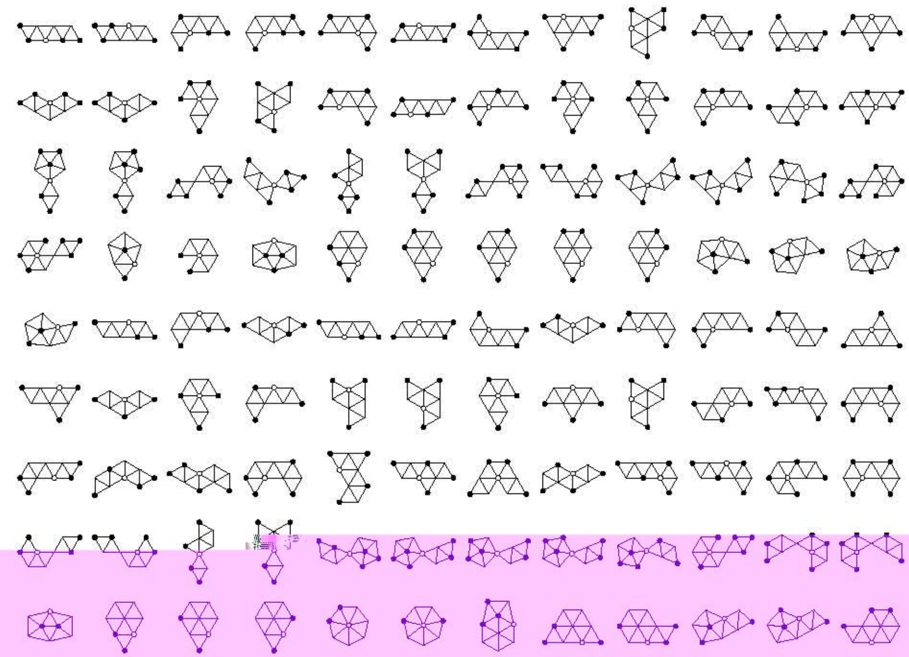


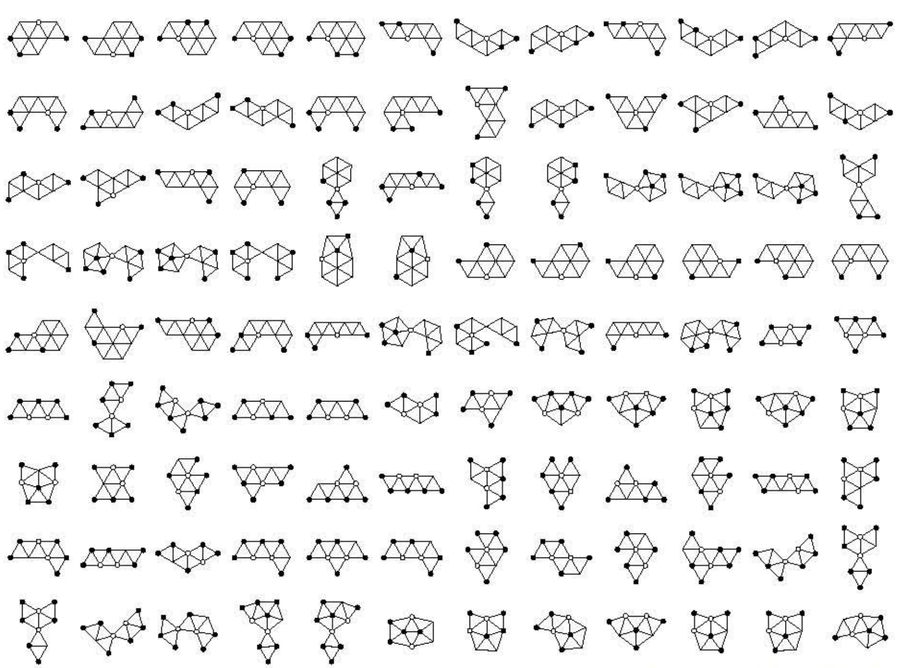

黄、緑交換
出ない.

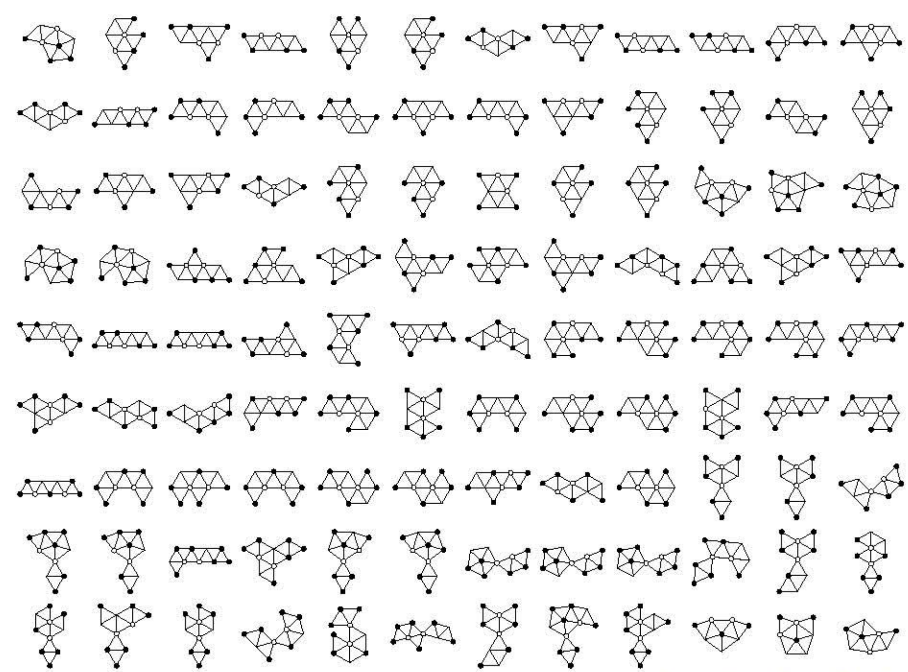



blue









特定问题的机器证明

- 基于机器学习方法

- 用大语言模型求解数学问题cap set problem
- 23年12月发表于Nature
- 在$\mathbb{Z}_3^n$里面找一个尽量大的集合，其中没有任何三个向量的和为0
- $n = 8, \boxed{496} \to 512$

Article

Mathematical discoveries from program search with large language models

https://doi.org/10.1038/s41586-023-06924-6
Received: 12 August 2023
Accepted: 30 November 2023
Published online: 14 December 2023
Open access
Check for updates

Bernardino Romera-Paredes[1,4] ✉, Mohammadamin Barekatain[1,4], Alexander Novikov[1,4], Matej Balog[1,4], M. Pawan Kumar[1,4], Emilien Dupont[1,4], Francisco J. R. Ruiz[1,4], Jordan S. Ellenberg[2], Pengming Wang[1], Omar Fawzi[3], Pushmeet Kohli[1] ✉ & Alhussein Fawzi[1,4] ✉

Large language models (LLMs) have demonstrated tremendous capabilities in solving complex tasks, from quantitative reasoning to understanding natural language. However, LLMs sometimes suffer from confabulations (or hallucinations), which can result in them making plausible but incorrect statements[1,2]. This hinders the use of current large models in scientific discovery. Here we introduce FunSearch (short for searching in the function space), an evolutionary procedure based on pairing a pretrained LLM with a systematic evaluator. We demonstrate the effectiveness of this approach to surpass the best-known results in important problems, pushing the boundary of existing LLM-based approaches[3]. Applying FunSearch to a central problem in extremal combinatorics—the cap set problem—we discover new constructions of large cap sets going beyond the best-known ones, both in finite dimensional and asymptotic cases. This shows that it is possible to make discoveries for established open problems using LLMs. We showcase the generality of FunSearch by applying it to an algorithmic problem, online bin packing, finding new heuristics that improve on widely used baselines. In contrast to most computer search approaches, FunSearch searches for programs that describe how to solve a problem, rather than what the solution is. Beyond being an effective and scalable strategy, discovered programs tend to be more interpretable than raw solutions, enabling feedback loops between domain experts and FunSearch, and the deployment of such programs in real-world applications.

逻辑思维主要内容

- 逻辑学基础
  - 布尔逻辑、真值表
  - 合取范式、析取范式
  - 谓词逻辑
  - 公理系统
- 图灵机模型
- 思考题：猜帽子游戏

思考题

- 问题：n名同学围成一圈，每个人随机的分配一顶红色或者蓝色的帽子，要求所有人同时猜出自己帽子的颜色。请设计一种策略，使得**同时猜对**的概率最高。

$\frac{1}{2^n}$

谢谢！